Tam Değerin Özellikleri

$x, y \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{Z}$ olsun.

1) $[\![x]\!] = a \Rightarrow a \leq x < a+1$

2) $[\![x \mp a]\!] = [\![x]\!] \mp a$

3) $[\![x+y]\!] \geq [\![x]\!] + [\![y]\!]$

4) $x = [\![x]\!] + t \quad , \quad 0 \leq t < 1$

5) $[\![x]\!] \leq x$

6) $[\![x]\!] < a \Rightarrow x < a$

Örnek: $[\![-3x]\!] = -3$ ise çözüm kümesini bulunuz.

$-3 \leq -3x < -2 \Rightarrow 1 \geq x > \frac{2}{3} \Rightarrow Ç.K = (\frac{2}{3}, 1]$

Örnek: $-2 < [\![2x-4]\!] \leq 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

$-1 \leq 2x-4 < 2$ olmalıdır.

$\Rightarrow 3 \leq 2x < 6 \Rightarrow \frac{3}{2} \leq x < 3 \Rightarrow ÇK = [\frac{3}{2}, 3)$

FONKSİYONLAR

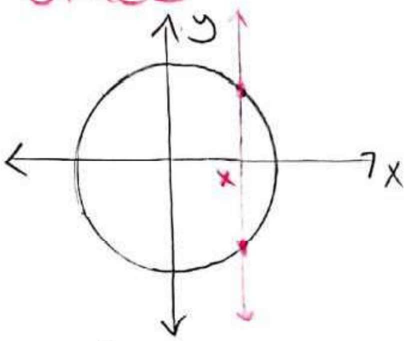
Fonksiyon: A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere A daki her elemanı B deki yalnız bir eleman ile eşleyen kurala A dan B ye bir fonksiyon denir. A ya tanım kümesi, B ye ise değer kümesi denir. A daki elemanların eşlendiği B deki elemanların kümesine ise görüntü kümesi denir.

Örnek:

Fonksiyon	Tanım kümesi	Görüntü kümesi
$y=x^2$	$\mathbb{R}$	$[0, \infty)$
$y=\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}-\{0\}$	$\mathbb{R}-\{0\}$
$y=\sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y=\sqrt{4-x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$
$y=\sqrt{1-x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$

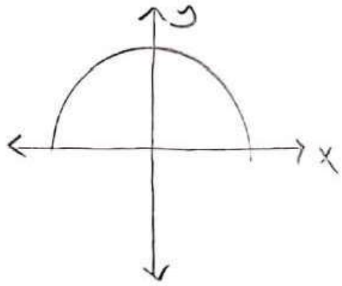
Bir fonksiyon için dikey doğru testi: Bir f fonksiyonunu, tanım kümesindeki her x için sadece bir $f(x)$ değerine sahip olduğundan hiçbir dikey doğru fonksiyonun grafiğini birden fazla yerde kesemez.

Örnek



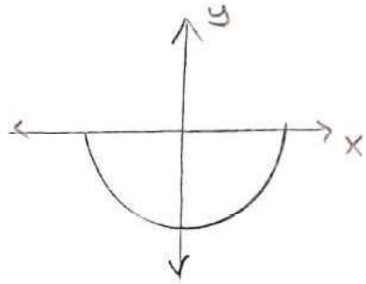
$x^2+y^2=1$

Fonksiyon değil



$y=\sqrt{1-x^2}$

Fonksiyon



$y=-\sqrt{1-x^2}$

Fonksiyon

Artan - Azalan Fonksiyonlar: $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere herhangi iki $x_1, x_2 \in I$ verilsin. 10

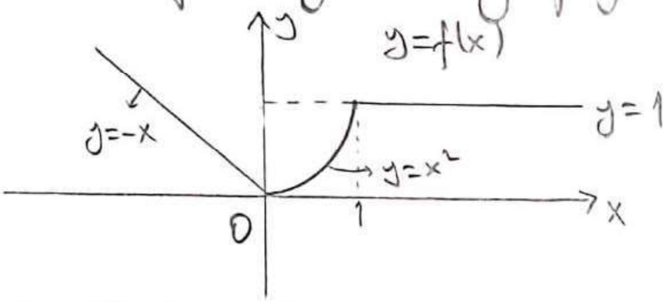
$x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonuna I üzerinde artandır denir.

$x_1 < x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonuna I üzerinde azalandır denir.

Örnek: $f(x)=\begin{cases} -x, & x<0 \\ x^2, & 0\leq x \leq 1 \\ 1, & 1<x \end{cases}$ fonksiyonu $(-\infty, 0]$ aralığında azalan, $[0,1]$ aralığında artan, $(1,\infty)$ aralığında ne azalan ne de artandır.

Uyarı: Reel eksende soldan sağa hareket edildiğinde fonksiyonun grafiği yükseliyorsa fonksiyon artan, alçalıyorsa fonksiyon azalandır.

Örnekteki fonksiyonun grafiğine bakalım:



Tek-Çift Fonksiyonlar: $f: D \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. Her $x \in D$ için $f(-x)=f(x)$ oluyorsa f e çift fonksiyon, $f(-x)=-f(x)$ oluyorsa f e tek fonksiyon denir.

Örnek: • $f(x)=x^2$ çift fonksiyondur. Çünkü;

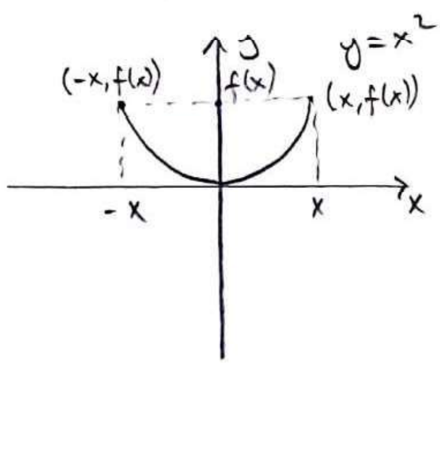
$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$ dir.

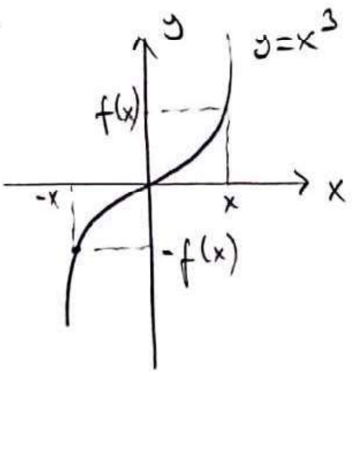
• $g(x)=x^3$ tek fonksiyondur. Çünkü;

$g(-x)=(-x)^3=-x^3=-g(x)$ dir.

• $h(x)=x+1$ ne tek ne de çift fonksiyondur.

Uyarı: f bir çift fonksiyon ise $(x,f(x))$ ve $(-x,f(x))$ fonksiyonun grafiği üzerinde olacağından f in grafiği y eksenine göre simetriktir. f bir tek fonksiyon ise $(x,f(x))$ ve $(-x,-f(x))$ fonksiyonun grafiği üzerinde olacağından f in grafiği orijine göre simetriktir. 12



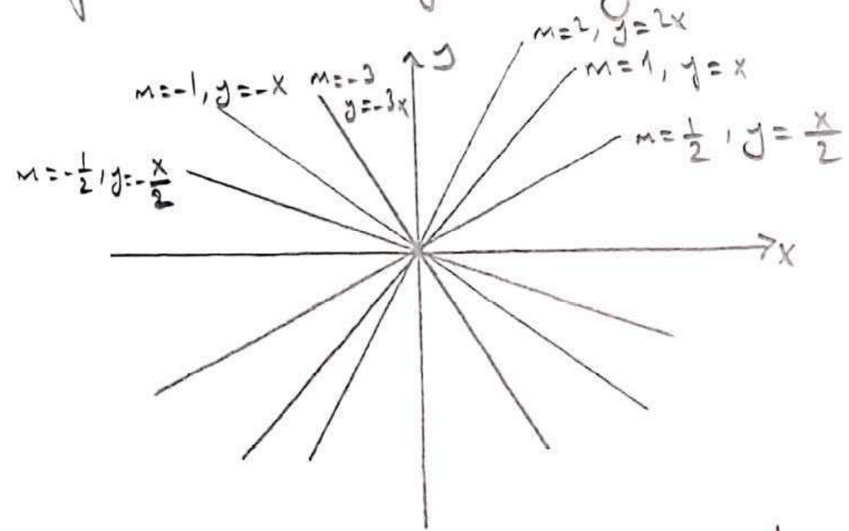


Özel Fonksiyonlar

Lineer Fonksiyonlar: m ve n sabit olmak üzere $f(x)=mx+n$ şeklindeki fonksiyona lineer fonksiyon denir.

$m=1, b=0$ için $f(x)=x$ fonksiyonuna birim fonksiyon denir.

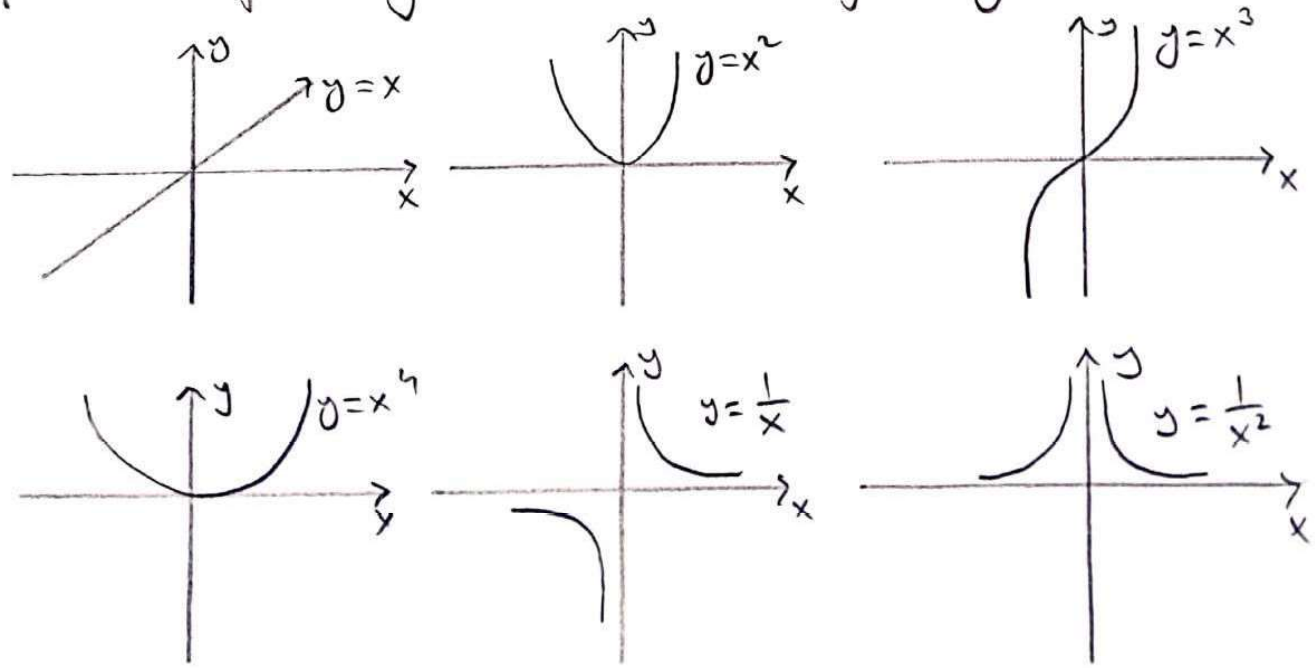
$b=0$ ise $f(x)=mx$ orijinden geçer.

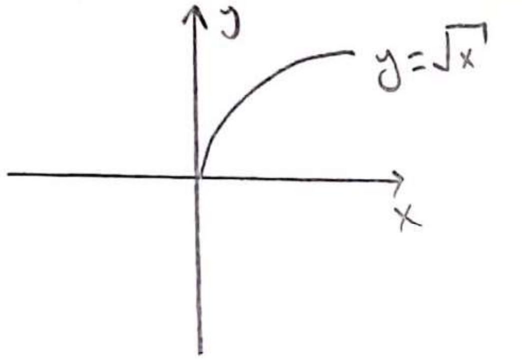


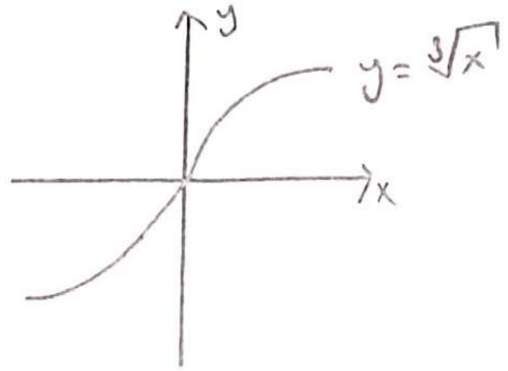
Uyarı: $f(x)=mx+n$ fonksiyonu eğimi m olan doğrudur.

Eğim $m=0$ ise $f(x)=b$ fonksiyonuna sabit fonk- 14
siyon denir.

Kuvvet fonksiyonu: a sabit bir sayı olmak üzere $f(x)=x^a$ fonksiyonuna kuvvet fonksiyonu denir.



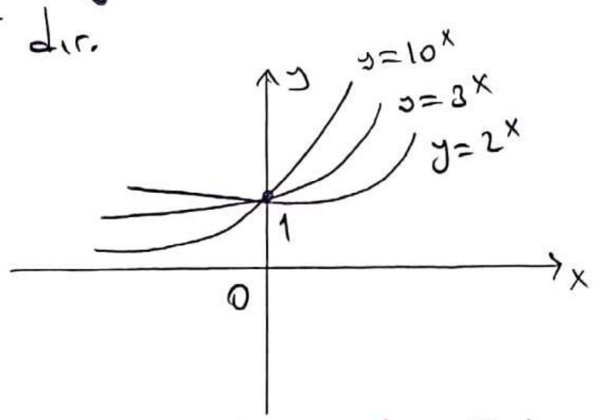


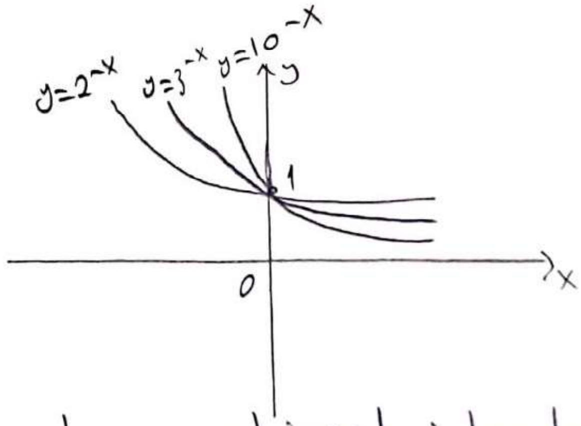


Polinomlar: $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sabit reel sayılar olmak üzere $p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$ şeklinde tanımlı p fonksiyonuna polinom denir. $n\neq 0$ ise n ye polinomun derecesi denir. Polinomlar $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlıdır.

Rasyonel fonksiyonlar: p ve q polinom olmak üzere $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ fonksiyonuna rasyonel fonksiyon denir. Bir rasyonel fonksiyon $q(x)\neq 0$ olan tüm x reel sayıları için tanımlıdır.

Üstel fonksiyonlar: $a\in\mathbb{R}^+$, $a\neq 1$ olmak üzere $f(x)=a^x$ şeklindeki fonksiyona üstel fonksiyon denir. Tüm üstel fonksiyonların tanım kümesi $\mathbb{R}$ ve görüntü kümesi $\mathbb{R}^+$ dır. 16





Cebirsel fonksiyonlar: Polinomlardan cebirsel işlemler ile (toplama, çıkarma, bölme, çarpma ve kök alma) elde edilen fonksiyonlara cebirsel fonksiyon denir.

Transandantal fonksiyonlar: Cebirsel olmayan fonksiyonlara denir. Trigonometrik, ters trigonometrik, logaritmik fonksiyonlar bu tip fonksiyonlara örnektir.

Tam deger fonksiyonu: $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x) = [\![x]\!]$ fonksiyonuna tam deger fonksiyonu denir.

Örnek: $f: [-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = [\![x]\!]$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

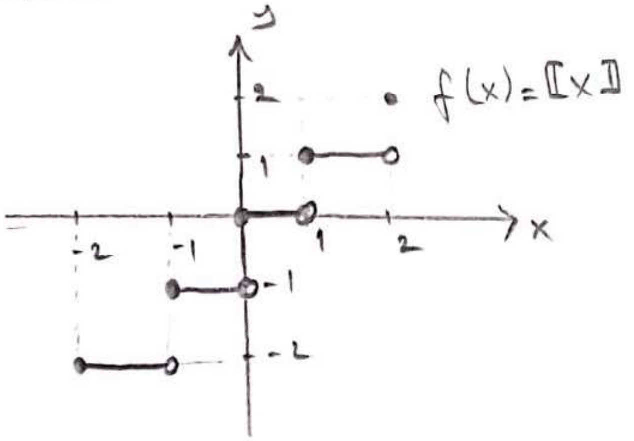
$-2 \leq x < -1$ için $f(x) = -2$

$-1 \leq x < 0$ için $f(x) = -1$

$0 \leq x < 1$ için $f(x) = 0$

$1 \leq x < 2$ için $f(x) = 1$

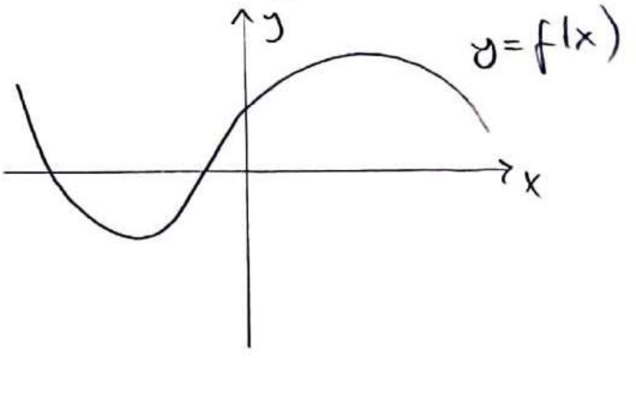
$x = 2$ için $f(2) = 2$

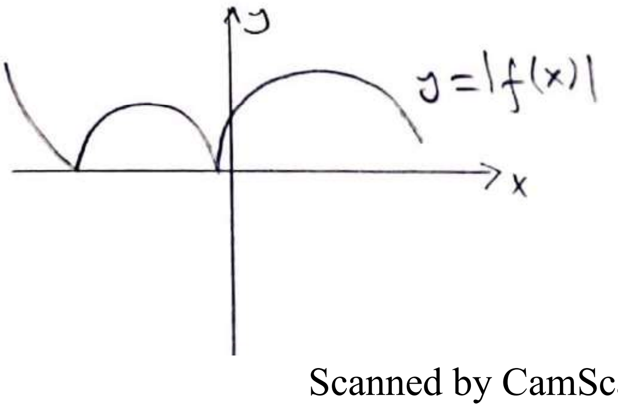


Mutlak deger fonksiyonu: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$

$$|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$$ şeklinde tanımlanan fonksiyona f fonksiyonunun mutlak deger fonksiyonu denir.

Örnek: $y = |f(x)|$ in grafiği çizilirken $y = f(x)$ in grafiğinde x ekseninin üstünde kalan noktalar aynen alınır, " " altında " " in x eksenine göre simetriği alınarak çizim tamamlanır.





İşaret fonksiyonu:

$$\operatorname{sgn} f(x) = \begin{cases} 1, & f(x) > 0 \\ 0, & f(x) = 0 \\ -1, & f(x) < 0 \end{cases}$$ şeklinde tanımlanan

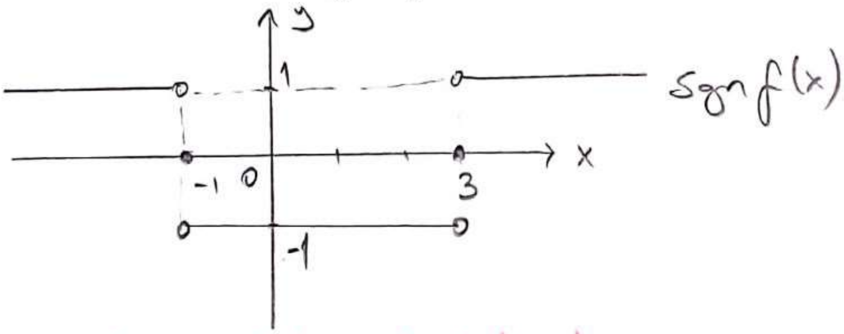
fonksiyondur.

Örnek: $f(x) = x^2 - 2x - 3$ olmak üzere $\operatorname{sgn} f(x)$ in grafiğini çizelim:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3,\ x = -1$$

x		-1		3	
x^2-2x-3	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn} f(x) = \begin{cases} 1, & x < -1 \text{ veya } x > 3 \\ 0, & x = -1 \text{ veya } x = 3 \\ -1, & -1 < x < 3 \end{cases}$$



Fonksiyonlarla Yapılan Cebirsel işlemler

$f: D_f \to \mathbb{R}$, $g: D_g \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon, $c \in \mathbb{R}$ sabit olsun.

$$(f \mp g)(x) = f(x) \mp g(x), \quad x \in D_f \cap D_g$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x), \quad x \in D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in D_f \cap D_g,\ g(x) \neq 0$$

$$(cf)(x) = c f(x), \quad x \in D_f.$$

Örnek: $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $g(x) = \frac{x+1}{x}$ olmak üzere $f+g$, $f \cdot g$, f/g ve $5f$ fonksiyonlarını ve tanım kümelerini bulunuz.

Öncelikle f ve g nin tanım kümelerini bulalım:

$$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x^2 \Rightarrow x \in [-1, 1] \Rightarrow D_f = [-1, 1]$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{0\}$$

İşaret fonksiyonu:

$$\operatorname{sgn} f(x) = \begin{cases} 1, & f(x) > 0 \\ 0, & f(x) = 0 \\ -1, & f(x) < 0 \end{cases}$$ şeklinde tanımlanan

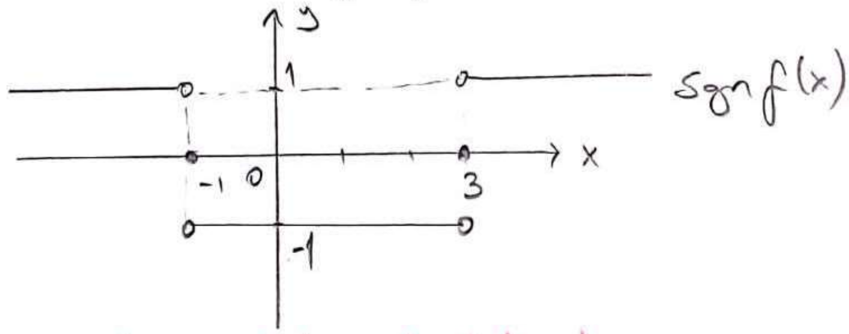
fonksiyondur.

Örnek: $f(x) = x^2 - 2x - 3$ olmak üzere $\operatorname{sgn} f(x)$ in grafiğini çizelim:

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3, \ x = -1$

x		-1		3	
x^2-2x-3	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn} f(x) = \begin{cases} 1, & x < -1 \text{ veya } x > 3 \\ 0, & x = -1 \text{ veya } x = 3 \\ -1, & -1 < x < 3 \end{cases}$$



19

Fonksiyonlarla Yapılan Cebirsel İşlemler

$f : D_f \to \mathbb{R}$, $g : D_g \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon, $c \in \mathbb{R}$ sabit olsun.

$(f \mp g)(x) = f(x) \mp g(x), \quad x \in D_f \cap D_g$

$(f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x), \quad x \in D_f \cap D_g$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in D_f \cap D_g, \ g(x) \neq 0$

$(cf)(x) = c f(x), \quad x \in D_f$.

Örnek: $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $g(x) = \dfrac{x+1}{x}$ olmak üzere $f+g$, $f \cdot g$, f/g ve $5f$ fonksiyonlarını ve tanım kümelerini bulunuz.

Öncelikle f ve g nin tanım kümelerini bulalım:

$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x^2 \Rightarrow x \in [-1, 1] \Rightarrow D_f = [-1, 1]$

$D_g = \mathbb{R} - \{0\}$

- $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \sqrt{1-x^2} + \frac{x+1}{x}$

$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-1,0) \cup (0,1]$

- $(fg)(x) = f(x)g(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}(x+1)}{x}$

$D_{fg} = D_f \cap D_g = [-1,0) \cup (0,1]$

- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{1-x^2}\, x}{x+1}$

$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g : g(x) = 0\} = (-1,0) \cup (0,1]$

- $(5f)(x) = 5f(x)$

$D_{5f} = D_f = [-1,1]$

Örten fonksiyon: $f: A \to B$ bir fonksiyon olsun. Her $y \in B$ için $f(x)=y$ olacak şekilde en az bir $x \in A$ var ise yani B de eşlenmemiş hiçbir eleman yok ise f e örten fonksiyon denir.

Örnek: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^3$ fonksiyonu örten bir fonksiyondur. Gerçekten de her $y \in \mathbb{R}$ için $x = y^{1/3} \in \mathbb{R}$ olarak alınırsa $f(x) = f(y^{1/3}) = (y^{1/3})^3 = y$ dir.

Birebir fonksiyon: $f: A \to B$ bir fonksiyon olsun. $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ oluyorsa f e birebir fonksiyon denir.

Bu tanıma denk olarak $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ oluyorsa f e birebir fonksiyon denir.

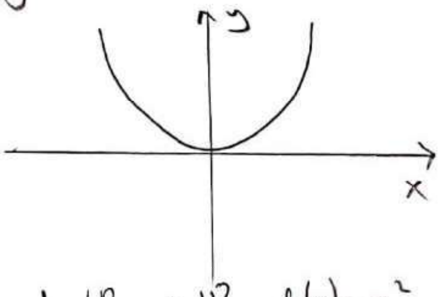
Örnek: Son örnekteki fonksiyon birebirdir. Çünkü; $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) = x_1^3 \neq x_2^3 = f(x_2)$ dir.

Örnek: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ fonksiyonu birebir değildir. Çünkü $-1, 1 \in \mathbb{R}$ için $-1 \neq 1$ iken $f(-1)=f(1)=1$ dir.

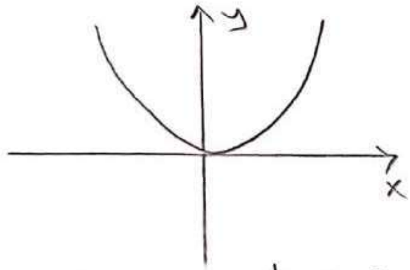
Uyarı: . Örten fonksiyonun grafiğinde x eksenine paralel doğrular grafiği en az bir noktada keser.

. Birebir fonksiyonun grafiğinde x eksenine paralel doğrular grafiği en fazla bir noktada keser.

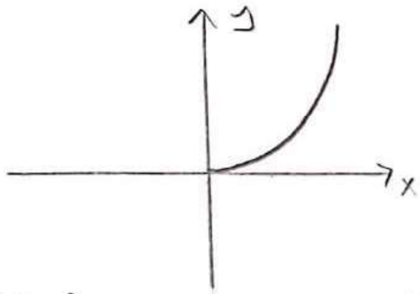
. Örtenlik veya birebirliğe bakılırken tanım ve değer kümeleri dikkate alınır.



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2$
1-1 değil, örten değil



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $f(x)=x^2$
örten ama 1-1 değil



$f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
$f(x)=x^2$
1-1 ve örten

Bileşke fonksiyonlar: f ve g iki fonksiyon olmak üzere $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ fonksiyonuna f ile g nin bileşkesi denir.

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$$

$f \circ g$ nin tanım kümesi, $g(x)$ f in tanım kümesinde olmak üzere g nin tanım kümesindeki x lerden oluşur.

Örnek: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x+1$ ise aşağıdaki fonksiyonları ve tanım kümelerini bulalım:

a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ f)(x)$ c) $(f \circ f)(x)$ d) $(g \circ g)(x)$

$D_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $D_g = \mathbb{R}$

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = \sqrt{x+1}$, $D_{f \circ g} = [-1, \infty)$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x}+1$, $D_{g \circ f} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

c) $(f\circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{1/4}$, $D_{f\circ f} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

d) $(g\circ g)(x) = g(g(x)) = g(x+1) = x+2$, $D_{g\circ g} = \mathbb{R}$

Uyarı: Bileşke fonksiyonun formülü ile tanım kümesi belirlemek doğru değildir. Örneğin; $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x}$ için $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$ olup $f\circ g$ nin tanım kümesi $\mathbb{R}$ değildir. Çünkü $g(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonu $x \geq 0$ olmasını gerektirir. O halde $D_{f\circ g} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dır.

Bir fonksiyonun grafiğinin kaydırılması

Dikey kaydırma: $y = f(x) + k$ nın grafiğini elde etmek için

$k>0 \Rightarrow$ f in grafiği k birim yukarı

$k<0 \Rightarrow$ " " " " aşağı kaydırılır.

Yatay kaydırma: $y = f(x+k)$ grafiğini elde etmek için

$k>0 \Rightarrow$ f in grafiği k birim sola,

$k<0 \Rightarrow$ " " " " sağa kaydırılır.

Örnek: • $y = x^2+1$ in grafiğini elde etmek için $y=x^2$ nin grafiği 1 birim yukarı kaydırılır.

• $y = x^2-2$ nin grafiğini elde etmek için $y=x^2$ nin grafiği 2 birim aşağı kaydırılır.

• $y=(x+3)^2$ nin grafiğini elde etmek için $y=x^2$ nin grafiği 3 birim sola kaydırılır.

• $y=|x-2|-1$ in grafiğini elde etmek için $y=|x|$ in grafiği 2 birim sağa, 1 birim aşağı kaydırılır.